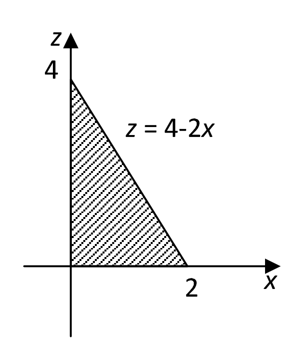
COLOQUIO 9-12-10

1- Área de la superficie: $x^2 + y^2 = 2x$, $z \le 4 - (x^2 + y^2)$, $z \ge 0$

Solución: El Área de una superficie es: $A = \iint_S ds = \iint_D \|\breve{n}\| \, dx \, dz$

La superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 2x$ no es proyectable en el plano *xy*, proyectamos sobre el plano *xz*. La región de integración resulta, intersecando:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ z = 4 - (x^2 + y^2) \end{cases} \Rightarrow \quad z = 4 - 2x$$



Para sacar el normal se define la función $\overline{F}(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 - 1$

La superficie de nivel 0 de $\overline{F}$ es la superficie:

$x^2 + y^2 = 2x$

El normal es:

$$\breve{n} = \frac{\nabla \overline{F}}{\overline{F_y'}} = \frac{(\,2\,(x-1)\,,\,2y\,,\,0)}{2y} = \frac{(x-1\,,\,y\,,\,0)}{y}$$

$$A = \iint_S ds = 2\iint_D \|\breve{n}\| \, dx \, dz = 2\iint_D \sqrt{\frac{(x-1)^2 + y^2}{y^2}} \; dz \; dx = 2\iint_D \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 2x + 1}{y^2}} \; dz \; dx$$

Evaluando el integrando sobre la superficie, la expresión: $x^2 + y^2 = 2x$ entonces:

$$A = 2\iint_D \sqrt{\frac{2x - 2x + 1}{2x - x^2}} \; dz \; dx = 2\int_0^2 \int_0^{4-2x} \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dz \; dx = 2\int_0^2 \frac{(4-2x)}{\sqrt{2x - x^2}} dx = 2\int_0^2 \frac{(2+2-2x)}{\sqrt{2x - x^2}} dx$$

$$= 2\int_0^2 \frac{2}{\sqrt{2x - x^2}} dx + 2\int_0^2 \frac{2-2x}{\sqrt{2x - x^2}} dx = 4\pi$$

La 1era integral por tabla y la 2da por sustitución.

De otra forma (Parametrizando la superficie):

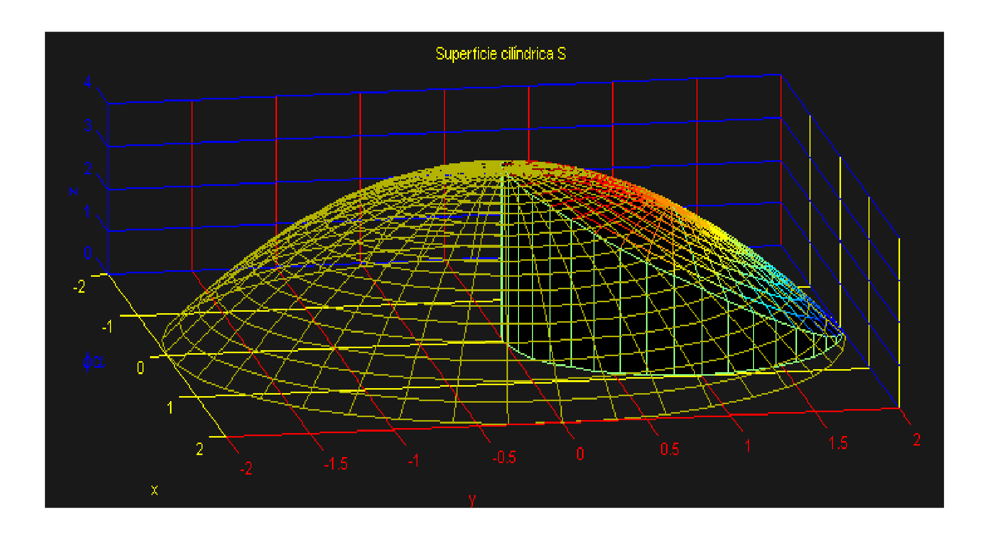
La Figura, abajo, muestra la superficie cilíndrica S de ecuación $x^2 + y^2 = 2x$ limitada superiormente por el paraboloide de ecuación $z \le 4-(x^2+y^2)$ e inferiormente por $z = 0$ (considerando al eje y como eje x para la visualización de la misma).
La superficie S puede parametrizarse por:

$\overline{T}: D \subset R^2 \to R^3 \,/\, \overline{T}(u,v) = (\cos(u),\, 1+sen(u), v)$ con $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 4-2(1+sen(u))$ un vector normal a la Superficie está dado por: $\overline{N} = \frac{\partial \overline{T}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{T}}{\partial v} = (\cos(u),\, sen(u), 0)$ vector cuya norma es 1.

El cálculo del área, es

$$\acute{A}rea\,(S) = \iint_S \|(\cos(u), sen(u), 0)\|\; du\; dv = \iint_S \sqrt{\underbrace{\cos^2(u) + sen^2(u)}_{1}}\, du\; dv =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2-2sen(u)} dv\; du = \int_0^{2\pi} [2-2sen(u)]\; du = 4\pi$$



2- **Calcular la Masa del cuerpo limitado por:** $x^2 + 2y^2 \le z \le 2 - x^2$ **si el gradiente de la densidad de masa es:** $\nabla \delta(x,y,z) = (2xy, x^2, 0)$, $\delta(0,0,0) = 1$

Solución: Obtenemos la densidad δ integrando las componentes del gradiente de δ:

$$\delta'_x = 2xy \quad \Rightarrow \quad \delta = x^2 y + C(y,z)$$
$$\delta'_y = x^2 + C'(y,z) = x^2 \quad \Rightarrow \quad C'(y,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad C(y,z) = C$$
$$\Rightarrow \quad \delta(x,y,z) = x^2 y + C$$

Con la condición $\delta(0,0,0) = 1$ resulta: $C = 1$

Por lo tanto: $\underline{\delta(x,y,z) = x^2 y + 1}$

La región de integración resulta de intersecar ambas superficies:

$$\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$$

En coordenadas cilíndricas:

$$Masa = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_{\rho^2+\rho^2 sen^2\theta}^{2-\rho^2\cos^2\theta} \left[\rho^3 \cos^2(\theta)\ sen(\theta) + 1\right] \rho\ dz\ d\rho\ d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left[\rho^3 \cos^2(\theta)\ sen(\theta) + 1\right] \left[\underbrace{2 - \rho^2\cos^2\theta - \rho^2 - \rho^2 sen^2\theta}_{2-\rho^2-\rho^2}\right] \rho\ d\rho\ d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left[2 - 2\rho^2\right] \left[\rho^3 \cos^2(\theta)\ sen(\theta) + 1\right] \rho\ \ d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (2\rho^4 \cos^2(\theta)\ sen(\theta) + 2\rho - 2\rho^6 \cos^2(\theta)\ sen(\theta) - 2\rho^3)\ d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[2\frac{\rho^5}{5}\cos^2(\theta)\ sen(\theta) + \rho^2 - 2\frac{\rho^7}{7}\cos^2(\theta)\ sen(\theta) - \frac{\rho^4}{2}\right]_0^1 d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{2}{5}\ \cos^2(\theta)\ sen(\theta) + 1 - \frac{2}{7}\ \cos^2(\theta)\ sen(\theta) - \frac{1}{2}\right] d\theta =$$

$$= \left[-\frac{4}{35}\frac{\cos^3(\theta)}{3} + \frac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{35}\cdot\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{4}{105} + \frac{\pi}{4}}}$$

3. Si $\overline{F}(\breve{r}) = h(\|\breve{r}\|)\ \breve{r}$ es un campo radial con $\breve{r} = (x\ ,\ y)$, siendo $h(\|\breve{r}\|) \neq 0$ para todo $\breve{r} \in R^2$ y $h : R \to R$ con derivada continua. Halle la familia de líneas de campo y la familia ortogonal a ella.

Solución: Siendo $\breve{r} = (x\ ,\ y)$, el campo es:

$$\overline{F}(\breve{r}) = h(\|\breve{r}\|)\ \breve{r} = h(\|\breve{r}\|)(x, y) = \left(x\ h(\sqrt{x^2 + y^2})\ \ ,\ \ y\ h(\sqrt{x^2 + y^2})\right)$$

Para encontrar la familia de líneas de campo planteamos:

$$\frac{dx}{x\ h(\sqrt{x^2 + y^2})} = \frac{dy}{y\ h(\sqrt{x^2 + y^2})} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln(y) = \ln(x) + \ln(C)$$

La familia de Líneas de campo son:

$$\boxed{y = Cx}$$

La familia de líneas ortogonales son:

$$y' = C \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y'} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad -x\,dx = y\,dy$$

$$-\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x^2 + y^2 = K}}$$

4. Sea $\overline{F}(x,y,z) = (x\,h(y) + 4e^{-y},\ h(y) - y,\ h(x) - yx)$, hallar $h: R \to R$ con derivada continua tal que el flujo del campo a través de cualquier sup. cerrada, orientable y regular sea nulo, sabiendo que: $\overline{F}(0,0,0) = (4,0,0)$. Con esa función *h* calcular el flujo a través de la superficie <u>abierta</u> *S* de ecuación: $x = 1 + \sqrt{y^2 + z^2}$, $x \le 4$ indicando el normal utilizado.

Solución:

Para que el flujo sea nulo debe ser nula la divergencia del campo:

Si $\overline{F}(x,y,z) = (x\,h(y) + 4e^{-y},\ h(y) - y,\ h(x) - yx)$ entonces:

$$\nabla \cdot \overline{F} = h(y) + h'(y) - 1 = 0 \quad \to \quad \underline{h(y) + h'(y) - 1 = 0}$$

Se resuelve la Ecuación Diferencial por el método de variables separables:

$$h'(y) = 1 - h(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dh(y)}{1 - h(y)} = dy$$

$$-\ln(1 - h(y)) = y + C \quad \Rightarrow \quad \ln(1 - h(y)) = -y \underbrace{-C}_{K}$$

$$1 - h(y) = e^{-y+K} \quad \Rightarrow \quad h(y) = 1 - C_1 e^{-y}$$

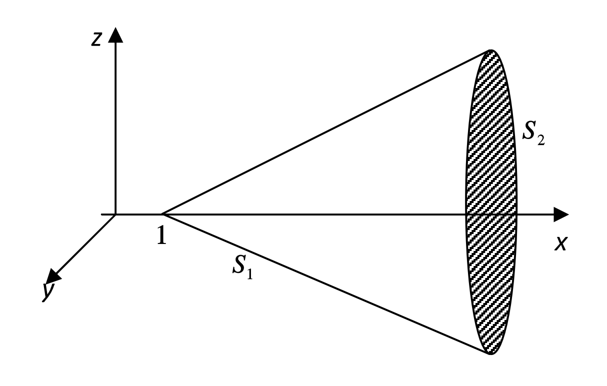
Si $\overline{F}(0,0,0) = (4,0,0)$ .entonces $h(0) = 0$ con esta condición resulta:

$$h(0) = 1 - C_1 e^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1$$

Reemplazando, la función h es: $h(y) = 1 - e^{-y}$

El campo vectorial es: $\overline{F}(x,y,z) = (x(1 - e^{-y}) + 4e^{-y},\ (1 - e^{-y}) - y\ ,\ (1 - e^{-y}) - yx)$

Como la superficie es abierta hay que cerrarla con el plano $x = 4$ para aplicar el Teorema de Gauss



El normal al plano $x = 4$ es el vector (1,0,0).

Por Gauss

$$\iint_{S_1} \overline{F} \,.\, \breve{n}\ ds + \iint_{S_2} \overline{F} \,.\, \breve{n}\ ds = \iiint_V \underbrace{\nabla \cdot \overline{F}}_{0}\ dx$$

$$\iint_{S_1} \overline{F} \,.\, \breve{n}\ ds + \iint_{S_2} \overline{F} \,.\, \breve{n}\ ds = 0$$

$$\iint_{S_1} \overline{F} \,.\, \breve{n}\ ds = -\iint_{S_2} \overline{F} \,.\, \breve{n}\ ds$$

Calculamos el flujo a través de la superficie S_2 para obtener el flujo a través de la Sup. Cónica S_1:

$$\phi = \iint_{S_1} \overline{F} \,.\, \breve{n}\ ds = -\iint_D (4\ (1-e^{-y}) + 4e^{-y}\ ,\ 1-e^{-y} - y\ ,\ 1-e^{-4} - y\ 4).(1,0,0)\ dy\ dz$$

$$\underline{\underline{\phi}} = -\iint_D (4 - 4e^{-y} + 4e^{-y})\,dy\ dz = -\ 4 \iint_D dy\ dz = -4\ \acute{A}rea(D) = -4\ .\ 9\pi = \underline{\underline{-36\pi}}$$

D es la proyección de S_2 sobre el plano yz, este círculo tiene ecuación $y^2 + z^2 \leq 9$

5- Si $\overline{F}(x, y) = (yx^2 + sen(x) - 3y\ ,\ 6x + e^y - xy^2)$ halle a>0 tal que la circulación del campo a lo largo de $x^2 + y^2 = a^2$ sea máxima.

Solución:

Usamos el teorema de Green : $\oint_C \overline{F}.dl = \iint_D (\ Q\ '_x - P\ '_y\ )\ dx\ \ dy$

$$\oint_C \overline{F}.dl = \iint_D (6 - y^2 - x^2 + 3)\ dx\ dy = \iint_D (9 - y^2 - x^2)\,dx\ dy$$

$$\oint_C \overline{F}.dl = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} (9-\rho^2)\rho\ d\rho\ d\theta = 9\pi a^2 - \pi\frac{a^4}{2}$$

Llamando $g(a) = 9\pi a^2 - \pi\dfrac{a^4}{2} \quad \Rightarrow \quad g\,'(a) = 18\pi a - 2\pi a^3 = 0$

$$2\pi a(9-a^2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=0 \vee a=3 \vee a=-3$$

Como $a>0$ la solución es $\underline{a = 3}$

Veamos que para ese valor hay un máximo:

$$g''(a)=18\pi-6\pi a^2 \quad \Rightarrow \quad g''(3)=18\pi-48\pi=-30\pi<0$$

Por lo tanto para $\underline{a = 3}$ hay máximo.

<u>Respuesta</u>: La circulación de $\overline{F}$ a lo largo de la curva es máxima cuando $\underline{a = 3}$

